Analiza Matematyczna I.2, egzamin, 16 czerwca 2012, 9:05 — 12:20

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach, bo sprawdzać je będą różne osoby.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nr. grupy ćwiczeniowej i nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

Należy przeczytać **CAŁE** zadanie **PRZED** rozpoczęciem rozwiązywania go!

---

1. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2}}$.

---

2. Obliczyć długość wykresu funkcji f, jeśli $f(x) = \int_2^{\sqrt{x}} t^2 \cdot \sqrt{2t^4-6}\, dt$ w przedziale $[2,7]$.

---

3. Niech $a \in (0,1)$ będzie ustaloną liczbą. Obliczyć kresy funkcji f na przedziale $(0,1)$, jeśli $f(x) = (1-ax)^{1/x}$.

---

4. Niech $f_n(x) = n \ln \frac{nx+1}{nx-1}$ dla $x \in [1,+\infty)$. Znaleźć granicę ciągu (f_n). Wyjaśnić, czy ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny do swej granicy na półprostej $[1,+\infty)$.

---

5. Niech $T(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos x)}}$ dla $x \in (0,\pi)$.

Wykazać, że dla każdego $x \in (0,\pi)$ zachodzi nierówność $0 < T(x) < \infty$.

Wykazać, że $T\colon (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ściśle rosnącą.

Znaleźć $\lim\limits_{x\to 0} T(x)$. (*dodatek pierwszy*)

Wykazać, że przyjmując $T(0) = \lim\limits_{x\to 0} T(x)$ otrzymujemy funkcję klasy C^∞ na przedziale $[0,\pi)$, a nawet analityczną w punkcie 0 i znaleźć $T'(0)$. (*dodatek drugi*)

Pytanie: czy x musi aż w tylu różnego typu miejscach występować w definicji funkcji T?
